〔I〕次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) 袋Aには白玉2個，赤玉4個が，袋Bには白玉3個，赤玉2個がそれぞれ入っている．袋A，Bに対して，「1個のさいころを投げて，1か2の目が出れば袋Aを，他の目が出れば袋Bを選び，選んだ袋から玉を1個取り出して，取り出した玉はどちらの袋にも戻さない」という試行を，どちらかの袋の玉がすべてなくなるまで繰り返す．このとき，1回目の試行で袋Aから白玉を取り出す確率は $\boxed{\text{ア}}$，1回目の試行で白玉を取り出す確率は $\boxed{\text{イ}}$．1回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき，選ばれた袋がAである確率は $\boxed{\text{ウ}}$．2回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき，1回目の試行で取り出した玉も赤玉である確率は $\boxed{\text{エ}}$．袋Bより先に袋Aの玉がすべてなくなる確率は $\boxed{\text{オ}}$．

(2) 原点をOとする座標空間内の2点を $\mathrm{A}(6\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}-25,\ 3\sqrt{3}+26)$，$\mathrm{B}(2,\ 3\sqrt{3}+27,\ 3\sqrt{3}-26)$ とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 24 \times (\boxed{\text{カ}})$．2点A，Bを通る直線を ℓ とすると，原点Oから直線 ℓ に垂線OHを下ろしたときの点Hの z 座標は $\boxed{\text{キ}}$．r を正の実数として，中心が点H，半径が r の球面を S_r とし，中心が点 $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 0)$，半径が3の球面を T とする．2つの球面 S_r，T が1点のみを共有するような r の値のうち，最大のものを r_0 とすると，$r_0 = \boxed{\text{ク}}$．S_{r_0} と T の共有点をPとすると，点Pの z 座標は $\boxed{\text{ケ}}$．S_{r_0} が xy 平面と交わってできる円の半径は $\boxed{\text{コ}}$．

〔II〕n を自然数とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次の関係式で定める．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = a_{n+1} + \frac{9-n}{n+1}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．ただし，必要であれば，$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) a_3，b_1，b_2 を求めよ．

(2) $b_{n+1} = c_n b_n$ を満たす c_n について，c_n を n の式で表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) すべての自然数 n について $a_n \leqq a_{m_0}$ が成り立つような自然数 m_0 を考える．このような m_0 と $(10!)\cdot a_{m_0}$ の値の組をすべて求めよ．

〔 III 〕 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，$u=\sin\alpha$ とする．関数 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x+\alpha)$ とする．次の問いに答えよ．ただし，必要であれば，次の三角関数の和と積の関係式を用いてよい．

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を α を含まない u の式で表せ．

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，関数 $f(x)$ は $x=x_0$ で最小値 c をとるとする．このとき，x_0 を α の式で表し，c を α を含まない u の式で表せ．

(3) (2) の c について，曲線 $y=f(x)$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と 3 つの直線 $y=c$，$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの部分を D_1，D_2 とする．D_1，D_2 をそれぞれ直線 $y=c$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1，V_2 とするとき，$\dfrac{V_1+V_2}{\pi u^2}$ を α を含まない u の式で表せ．

〔 IV 〕 x を正の実数とし，n を 0 以上の整数とする．関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x)=x^{-\log x},\quad f_n(x)=x\frac{d}{dx}f_{n-1}(x)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-s^2}\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) m を自然数とする．実数 t の関数 $h(t)=\left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{t^k}{k!}\right)e^{-t}$ に対して，$\dfrac{d}{dt}h(t)$ を計算せよ．

(2) m を自然数とする．実数 t に対して，不等式 $\dfrac{t^{2m}}{m!}<e^{t^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $g_n(x)=f_n(x)\cdot x^{\log x}$ とし，$x=e^u$ として，合成関数 $\ell_n(u)=g_n(e^u)$ を考える．$\ell_0(u)$，$\ell_1(u)$ を求めよ．また，$n\geqq 1$ のとき，$\ell_n(u)$ は u の n 次式であることを示し，$\ell_n(u)$ における u^n の項の係数を求めよ．

(4) $I_n=\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{b}}^{b}\{f_n(x)\}^2x^{\log x-1}\,dx$ とする．I_0，I_1 の値を求めよ．

(5) (4) の I_n について，I_n を n の式で表せ．

201