数　　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　虚数単位を i とし，n を正の整数とする。A，B を複素数でいずれも 0 でないものとし，n 次の整式 $P_n(z)$ を

$$P_n(z) = Az^n - B$$

と定める。ただし，0 でない複素数 z を極形式で $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すときは，$\rho > 0$ かつ偏角 θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲となるように答えよ。

〔1〕 A，B をそれぞれ極形式で表したとき，

$$A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$B = s(\cos\beta + i\sin\beta)$$

とする。ただし，$r > 0$ かつ $s > 0$ かつ $0 \leqq \alpha \leqq \beta < 2\pi$ とする。

このとき，r，s，α，β を用いて 1 次方程式 $P_1(z) = 0$ の解 z_0 を極形式で表すと

$$z_0 = \boxed{\text{ア}}\left\{\cos\left(\boxed{\text{イ}}\right) + i\sin\left(\boxed{\text{イ}}\right)\right\}$$

となる。

n 次方程式 $P_n(z) = 0$ の n 個の解を w_0，w_1，…，w_{n-1} とする。ただし，$k = 0$，1，…，$n-1$ に対して w_k の偏角を θ_k としたとき，$0 \leqq \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < 2\pi$ であるとする。このとき，r，s，α，β，k，n を用いて w_k ($k = 0$，1，…，$n-1$) を極形式で表すと，

$$w_k = \boxed{\text{ウ}}\left\{\cos\left(\boxed{\text{エ}}\right) + i\sin\left(\boxed{\text{エ}}\right)\right\}$$

となる。

3 次方程式 $P_3(z) = 0$ の 3 つの解 w_0，w_1，w_2 が複素数平面上で表す 3 つの点を頂点とする三角形の面積を S とする。A，B がそれぞれ $|A - i| = \dfrac{7}{9}$

および $\left|B-i\right|=\dfrac{7}{9}$ を満たしながら変化するとき，S の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

〔2〕 以下では，$A=\sqrt{3}+i$，$B=i$ であり，$P_n(z)=(\sqrt{3}+i)z^n-i$ であるとする。複素数を係数とする整式においても，実数を係数とする整式の場合と同様に割り算できることが知られている。たとえば，$P_3(z)$ を $P_2(z)$ で割ったときの商を $Q(z)$，余りを $R(z)$ とすると，

$$P_3(z)=P_2(z)\,Q(z)+R(z)$$

となる。ただし，$Q(z)$ は1次の複素数係数の整式，$R(z)$ は1次以下の複素数係数の整式となる。このとき，C，D，E，F を複素数として $Q(z)=Cz+D$，$R(z)=Ez+F$ とすると，$C=\boxed{\text{カ}}$，$D=\boxed{\text{キ}}$，$E=\boxed{\text{ク}}$，$F=\boxed{\text{ケ}}$ である。

$P_4(z)$ を $P_1(z)$ で割ると，余りは定数となる。このとき，商を $Q(z)$，余りを R とすれば，

$$P_4(z)=P_1(z)\,Q(z)+R$$

が成立する。したがって，〔1〕で定めた $P_1(z)=0$ の解 z_0 を用いれば，余り R は $R=\boxed{\text{コ}}$ であることが分かる。ただし $\boxed{\text{コ}}$ は $p+qi$（p，q は実数）の形で答えよ。

$P_{11}(z)$ を $P_2(z)$ で割った余りを $R(z)$ とすると，$R(z)$ は1次以下の複素数係数の整式となる。G，H を複素数として $R(z)=Gz+H$ とするとき，$G=\boxed{\text{サ}}$，$H=\boxed{\text{シ}}$ である。

Ⅱ　n および k を正の整数とする。関数

$$f_k(x) = e^{-\frac{kx}{n}}$$

について考える。ただし，必要ならば $\lim_{n \to \infty} ne^{-n} = 0$ を用いてよい。

〔1〕　積 $f_1(x)f_2(x)f_3(x) \cdots f_n(x)$ を $P_n(x)$ とする。このとき，$P_n(x)$ を計算すると $P_n(x) = \boxed{\text{ア}}$ となる。さらに，$\lim_{n \to \infty} P_n\left(\frac{1}{n}\right) = \boxed{\text{イ}}$ である。

〔2〕　和 $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$ を $S_n(x)$ とする。$x \neq 0$ のとき，$S_n(x)$ を計算すると $S_n(x) = \boxed{\text{ウ}}$ となる。さらに，$\lim_{n \to \infty} S_n(n) = \boxed{\text{エ}}$ である。また，和 $f_1(x) + 2f_2(x) + 3f_3(x) + \cdots + nf_n(x)$ を $T_n(x)$ とすると，$\lim_{n \to \infty} T_n(n) = \boxed{\text{オ}}$ である。

〔3〕　関数 $g_k(x)$ を $g_k(x) = f_k''(x) \log f_1(x)$ と定める。このとき，$g_k(x)$ を計算すると $g_k(x) = \boxed{\text{カ}}$ となる。また，和

$$g_1\left(\frac{1}{n}\right) + g_2\left(\frac{2}{n}\right) + g_3\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + g_n\left(\frac{n}{n}\right)$$

を G_n とするとき，$\lim_{n \to \infty} G_n = \boxed{\text{キ}}$ である。

Ⅲ　実数 α，β が $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1$ を満たすとする。$s=\alpha+\beta$，$t=\alpha\beta$ とおくとき，s^2 は t を用いて $s^2=\boxed{\text{ア}}$ と表される。ここで，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^4+\beta^4$ および $\alpha^8-5\alpha^4\beta^4+\beta^8$ をそれぞれ t を用いて表すと，

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{イ}}$$
$$\alpha^4+\beta^4=\boxed{\text{ウ}}$$
$$\alpha^8-5\alpha^4\beta^4+\beta^8=\boxed{\text{エ}}$$

となる。

実数の定数 c を含む連立方程式

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x^8-5x^4y^4+y^8=c \end{cases} \quad \cdots\cdots (1)$$

が実数解をもつための c のとりうる値の範囲を考える。

α と β が関係式 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1$ を満たしながら変化するとき，s^2 がとりうる値の範囲は $0\leqq s^2\leqq\boxed{\text{オ}}$ であり，t がとりうる値の範囲は $\boxed{\text{カ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{キ}}$ である。$\boxed{\text{エ}}$ を t の関数とみて $f(t)=\boxed{\text{エ}}$ とおくと，$f'(t)=0$ となるのは $t=\boxed{\text{ク}}$ のときである。$\boxed{\text{カ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{キ}}$ の範囲での $f(t)$ の増減を調べることにより，$\boxed{\text{カ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{キ}}$ における $f(t)$ の値域は

$$\boxed{\text{ケ}}\leqq f(t)\leqq\boxed{\text{コ}}$$

であることが分かる。したがって，連立方程式（1）が実数解をもつのは

$\boxed{\text{サ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{シ}}$ のときである。

Ⅳ　n は3以上の整数とし，k は正の整数とする。十分多くの玉が入ったカゴと，玉の入っていない n 個の箱 B_1，B_2，…，B_n がある。また，$i = 1$，2，…，n に対して，p_i を $0 \leqq p_i \leqq 1$ を満たす実数とし，箱 B_i に向かって玉を投げるとき，その玉が箱 B_i に入る確率は p_i であるとする。このとき，次の試行を繰り返し行う。

カゴから玉を1個取り出して，その玉を箱 B_1 に向かって投げる。玉が箱 B_1 に入った場合，その時点で試行を終える。玉が箱 B_1 に入らなかった場合，その玉を拾って箱 B_2 に向かって投げる。以下 $i = 2$，…，$n - 1$ についてこの順番に，玉が箱 B_i に入った場合，その時点で試行を終え，玉が箱 B_i に入らなかった場合，その玉を拾って箱 B_{i+1} に向かって投げる。最後の箱 B_n に向かって玉を投げるとき，玉が箱 B_n に入った場合，その時点で試行を終え，入らなかった場合，その玉をカゴに戻して試行を終える。ただし，箱 B_i に向かって投げた玉が箱 B_i 以外の箱に入ることは考えない。

〔1〕　1回の試行において箱 B_2 に玉が入る確率を p_1，p_2 を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，1回の試行において箱 B_1 に玉が入らなかったとき，玉が箱 B_3 に入る条件つき確率を p_2，p_3 を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ である。

〔2〕　1回の試行で玉が B_1，B_2，…，B_n のいずれの箱にも入らない確率を C_n とする。

$i = 1$，…，n に対して $p_i = \dfrac{1}{n}$ であるとき，$C_n = \boxed{\text{ウ}}$ であり，自然対数の底 e の定義 $e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ を用いると $\lim_{n \to \infty} C_n = \boxed{\text{エ}}$ である。

また，$i = 1$，…，n に対して $p_i = \dfrac{1}{i + 2}$ であるとき，$C_n = \boxed{\text{オ}}$ である。

〔3〕　k 回目の試行で箱 B_1 に玉が初めて入る確率を p_1，k を用いて表すと $\boxed{\text{カ}}$ である。k 回目の試行が終わった時点で箱 B_1 に玉が1個だけ入っている確率を k を用いて表すと $\boxed{\text{キ}}$ である。

〔4〕　1回の試行で箱 B_3 に玉が入る確率を q とする。k 回目の試行で玉が箱 B_3 に初めて入る確率を q と k を用いて表すと $\boxed{\text{ク}}$ である。m を k 以下の正の整数とする。k 回目の試行が終わった時点で箱 B_3 に玉が m 個だけ入っている確率を q, k, m を用いて表すと $\boxed{\text{ケ}}$ である。