1. kを実数とする。$f(x)$と$g(x)$を

$$f(x)=\left|x^3-x\right|,\quad g(x)=k(x+1)$$

とおき，曲線$y=f(x)$をC，直線$y=g(x)$をℓとする。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) 曲線Cの概形をかけ。ただし，関数$f(x)$の極大値を調べる必要はない。

(2) 曲線Cと直線ℓがちょうど4つの共有点をもつようなkの値を求めよ。

2. 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を k とするとき，$a-k$ を a の小数部分という。n を自然数とし，$a_n=\sqrt{n^2+1}-n$ とおく。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2) b_n を $\left(3n-\dfrac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする。b_n を n を用いて表せ。

(3) b_n を (2) で定めたものとする。m, n を異なる 2 つの自然数とするとき，$a_m+b_n \fallingdotseq 1$ であることを示せ。

3. 媒介変数θを用いて

$$x = \sin\theta,\ \ y = \cos\theta + |\sin\theta| \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で表される曲線をCとする。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) 曲線Cの概形をかけ。

(2) 曲線Cで囲まれた部分の面積を求めよ。

4. s, t を実数とする。座標空間に3点

$$\mathrm{A}(-4,\ -1,\ 0),\ \mathrm{B}(-3,\ 0,\ -1),\ \mathrm{P}(s,\ t,\ -2s+t-1)$$

がある。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) 3点A, B, Pは一直線上にないことを示せ。

(2) 点Pから直線ABに下ろした垂線をPHとする。点Hの座標を s を用いて表せ。

(3) s, t が変化するとき，三角形ABPの面積の最小値を求めよ。

5. 連続関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ を満たし，$x > 0$ で微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする。$t \geqq 1$ を満たす t に対して，原点Oと点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とする。また，$t > 1$ を満たす t に対して，$y = f(x)$ $(1 \leqq x \leqq t)$ で表される曲線の長さを $h(t)$ とし，$t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) $t > 1$ とする。開区間 $(1, t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば，閉区間 $[1, t]$ で $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ。

(2) $t \geqq 1$ を満たす任意の t に対して，$g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする。このとき，$f(1)$ の値を求めよ。また，$t \geqq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ。